

Validation des calculs de transport d'énergie dans le logiciel MARTHE

Note technique

NT EAU 2011/02
Avril 2012

Dominique THIÉRY

Synthèse

Cette note présente la discrétisation des équations mises en œuvre dans le logiciel Marthe v7.4 pour la modélisation des transferts d'énergie. Des exemples de validation par comparaison à des solutions analytiques sont présentés.

1 Notations

On considère un volume élémentaire de référence V caractérisé par :

- ω = Porosité volumique [-]
- θ = teneur en eau volumique ; (en milieu saturé : $\theta = \omega$) [-]
- dx, dy, dz = Dimensions du volume de référence [L]
- Vol = Volume = $dx \cdot dy \cdot dz$ [L³]
- T = Température [°C ou °K]
- λ_W = Conductivité thermique de l'eau ($\lambda_W = 0.6$ W/m/K) [W/m/K]
- λ_M = Conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse [W/m/K]
- α_L, α_T = Dispersivité thermique longitudinale et transversale [L]
- ρC_W = Chaleur spécifique volumique de l'eau [J/m³/K] ($\rho C_W = 4.185 \cdot 10^6$) [J/m³/K]
- ρC_M = Chaleur spécifique volumique du minéral de la matrice poreuse [J/m³/K]
- u_x, u_y, u_z = Vitesses réelles (ou vitesse de pore) dans les 3 directions x, y et z

2 Variables et équations résolues

2.1 Phénomènes mis en jeu lors du transport d'énergie

Le transport d'énergie fait intervenir les phénomènes suivants :

- Transport par convection (ou advection)
- Transport pas conduction thermique

Pour expliciter ces différents phénomènes on considère le volume de référence V ainsi qu'un volume voisin V_V . Tous les paramètres de ce volume V_V ($\omega, \theta, dx, dy, dz, T_V, \lambda_M, \alpha_L, \alpha_T, \rho C_M$) peuvent être différents de ceux du volume de référence V .

En supposant que ce volume voisin V_V est situé par exemple à l'Est du volume de référence V , donc dans la direction ox , on peut définir :

- A = Surface d'échange = pondération des surfaces en vis-à-vis = $dy \cdot dz$ si les dimensions des 2 volumes sont identiques.
- L = Distance entre les centres des 2 volumes [$L = (dx_1 + dx_2) / 2$]
- Q = Débit d'échange (> 0 si entrant dans le volume de référence, < 0 si sortant) [L³T⁻¹]

Dans le modèle MARTHE, plusieurs schémas de transport de masse et d'énergie sont disponibles : Différences finies, TVD, MOC. Dans un souci de clarté on décrit ici le schéma le plus simple : le schéma de transport par différences finies « donor cell ».

2.1.1 Convection (ou Advection)

Le flux d'énergie Q_A , en Watts, apporté par convection, c'est-à-dire par l'énergie apportée ou perdue par le mouvement de l'eau s'écrit :

- $Q_A = Q \cdot \rho C_W \cdot T$ si $Q < 0$, c'est-à-dire si le débit sort V de vers V_V .
- $Q_A = Q \cdot \rho C_W \cdot T_V$ si $Q > 0$, c'est-à-dire si le débit vient de V_V vers V

soit la notation : $Q_A = Q \cdot \rho C_W \cdot T_{Ve}$ [1]

2.1.2 Conduction

On calcule la conductivité thermique λ_A de l'aquifère au repos. Dans MARTHE v.7.4 on considère que les pores se comportent comme des tubes orientés dans le sens de l'écoulement. Les conductivités λ_M de la matrice et λ_W des pores saturés sont donc en parallèle et s'ajoutent proportionnellement à leurs volumes relatifs : λ_W s'applique à θ (on néglige la conductivité de l'air) et λ_M s'applique à la matrice c'est-à-dire à $(1 - \omega)$.

$$\lambda_A = \theta \cdot \lambda_W + (1 - \omega) \cdot \lambda_M \quad [2]$$

La conductivité thermique λ_A de l'aquifère au repos est donc une moyenne pondérée entre la conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse (de l'ordre de 1 à 5 W/m/K) et la conductivité thermique de l'eau (0.598 W/m/K).

La conductivité thermique de l'aquifère au repos λ_A est augmentée par le coefficient de dispersion thermique dû à l'hétérogénéité du champ de vitesse : on obtient ainsi un tenseur de conductivité thermique λ_{AG} qui est la conductivité globale équivalente de l'aquifère.

Pour simplifier la rédaction, en considérant une vitesse réelle de module u constant, on peut écrire :

$$\lambda_L = \lambda_A + \alpha_L \cdot \rho C_W \cdot u \quad (\text{Composante longitudinale}) \quad [3]$$

$$\lambda_T = \lambda_A + \alpha_T \cdot \rho C_W \cdot u \quad (\text{Composante transversale}) \quad [4]$$

On remarque que par cohérence avec la formulation utilisée pour les transferts de masse, la dispersivité est multipliée par la vitesse de pore (ou vitesse de filtration) u , et non pas par la vitesse de Darcy.

Pour calculer le flux d'énergie Q_C , en Watts, échangé par conduction thermique on calcule les composantes de la conductivité thermique λ_{AG} entre les volumes V_V et V par moyenne harmonique des conductivités de chacun des 2 volumes pondérées par les $dy \cdot dz / dx$.

Soit une maille voisine située à la distance L et à température T_L : en considérant uniquement la composante longitudinale, dans un but de simplification de la rédaction, le flux d'énergie Q_C , en Watts provenant de cette maille à travers la surface d'échange A s'écrit :

$$Q_C = \lambda_{AG} \cdot A \cdot (T_V - T) / L \quad [5]$$

2.1.3 Terme source

Dans le volume de référence V on peut introduire un flux d'énergie Q_I (> 0 s'il est injecté, ou < 0 s'il est prélevé).

2.1.4 Terme de stockage

En régime permanent de transport le terme de stockage est égal à 0. En régime transitoire de transport, le terme de stockage Q_S exprime, en Watt, le flux de variation d'énergie pendant la durée dt d'un pas de temps de calcul.

$$Q_S = (\rho C_A \cdot T - \rho C_{AP} \cdot T_p) \cdot \text{Vol} / dt \quad [6]$$

avec :

T_p = Température au début du pas de temps.

$\rho C_A = \theta \cdot \rho C_W + (1 - \omega) \cdot \rho C_M$
= Chaleur spécifique de l'aquifère en fin de pas de temps

$\rho C_{AP} = \theta_p \cdot \rho C_W + (1 - \omega) \cdot \rho C_M$
= Chaleur spécifique de l'aquifère en début de pas de temps

θ_p = Teneur en eau volumique au début du pas de temps

Si la teneur en eau ne varie pas au cours du pas de temps, la chaleur spécifique de l'aquifère ρC_A ne varie pas et on obtient l'expression plus simple.

$$Q_S = (T - T_p) \cdot \rho C_A \cdot \text{Vol} / dt \quad [7]$$

2.2 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

Flux entrant par Advection + Flux entrant par Conduction + Flux Injecté = Flux de variation d'énergie

$$Q_A + Q_C + Q_I = Q_S \quad [8]$$

Soit en faisant la somme des composantes des 6 directions \mathbf{V} (Nord, Est, Sud, Ouest, Haut et Bas), et en utilisant le terme de stockage de l'équation [7] :

$$\sum_V [Q \cdot \rho C_W \cdot T_{V\epsilon}] + \sum_V [\lambda_{AG} \cdot A \cdot (T_V - T) / L] + [Q_I] = [(T - T_p) \cdot \rho C_A \cdot \text{Vol} / dt] \quad [9]$$

Plus formellement, en divisant par la section \mathbf{A} et en faisant apparaître la vitesse de Darcy $\mathbf{U} = \mathbf{Q} / \mathbf{A}$, l'équation générale de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\text{div}[\lambda_{AG} \cdot \text{Grad}(T)] - \text{div}[\rho C_W \cdot \mathbf{U} \cdot T] = \rho C_A \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad [10]$$

Soit en 1D dans la direction ox :

$$\frac{\partial^2(\lambda_{AG} \cdot T)}{\partial x^2} - \frac{\partial(\rho C_W \cdot U \cdot T)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho C_A \cdot T)}{\partial t} \quad [11]$$

Soit plus simplement dans le cas de coefficients constants

$$\lambda_{AG} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_W \cdot U \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \rho C_A \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad [12]$$

2.3 Résolution de l'équation de conservation de l'énergie

Le code de calcul commence par réaliser un calcul d'hydrodynamique pour déterminer les teneurs en eau, les vitesses et les débits d'échanges.

L'équation [9] représente alors un système algébrique linéaire non symétrique dont les seules inconnues sont les températures T dans toutes les mailles. Le terme de gauche correspond à une matrice creuse faisant intervenir 19 diagonales en 3D. Ce système est facile à résoudre par une méthode de gradients conjugués non symétriques, par exemple la méthode « Orthomin ».

Si le calcul hydrodynamique dépend des températures, par exemple si la viscosité et/ou la densité du fluide dépendent de la température, il faudra à chaque pas de temps résoudre itérativement l'équation de l'hydrodynamique (avec les viscosités et densités actualisées)

puis l'équation du transport d'énergie (avec les vitesses et débits actualisés). Généralement les interactions sont faibles et un tel calcul itératif est rarement nécessaire.

2.4 Prise en compte des épontes

Les épontes sont simplement des zones dans lesquelles on considère que les écoulements de fluide sont négligeables (roche saine par exemple). Dans le code MARTHE il n'y a pas de traitement particulier des épontes. Il suffit de donner une très faible perméabilité à ces zones. D'un point de vue numérique, on peut également imposer la charge, à une valeur arbitraire, dans ces zones, pour éviter de la calculer et éviter des éventuelles difficultés numériques si on choisit une perméabilité vraiment très faible.

2.5 Comparaison avec l'équation du transfert de masse

L'équation du transfert de masse s'écrit, en notant D le coefficient de diffusion et C la concentration :

$$\omega \cdot D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = \omega \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \quad [13]$$

Soit en divisant par ρC_A l'équation [12] du transfert d'énergie et par ω l'équation [13] du transfert de masse :

$$\frac{\lambda_{AG}}{\rho C_A} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho C_W}{\rho C_A} \cdot U \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad [14]$$

$$D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{U}{\omega} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad [15]$$

L'équation thermique [14] est identique à l'équation du transfert de masse [15] si on pose :

$$D_{th} = \frac{\lambda_{AG}}{\rho C_A} = \text{Diffusivité thermique} \quad [16]$$

$$\omega_{th} = \frac{\rho C_A}{\rho C_W} = \text{Porosité équivalente} \quad [17]$$

On peut également définir la vitesse thermique $u_{th} = U / \omega_{th}$

$$u_{th} = \frac{\rho C_W}{\rho C_A} \cdot U = \frac{\rho C_W}{\rho C_A} \cdot \omega_{vrai} \cdot u = \text{Vitesse thermique} \quad [18]$$

$$Q_{masse_th} = \frac{Q_{\text{énergie}}}{\rho C_W} \quad [19]$$

On peut également définir le coefficient de retard thermique R_{th} :

$$R_{th} = u_{vrai} / u_{th}$$

$$R_{th} = \frac{\rho C_A}{\rho C_W} \cdot \frac{1}{\omega_{vrai}} = \frac{\omega_{th}}{\omega_{vrai}} = \text{Retard thermique} \quad [20]$$

On peut également définir un nombre de Péclet numérique **Pe** et un nombre de Courant numérique **Cr** :

$$Pe = \frac{u_{th} \cdot dx}{D_{th}} \Rightarrow Pe = \frac{\rho C_W}{\lambda_{AG}} \cdot U \cdot dx = \frac{\rho C_W}{\lambda_{AG}} \cdot \omega_{vrai} \cdot u \cdot dx \quad [21]$$

$$Cr = \frac{u_{th} \cdot dt}{dx} \Rightarrow Cr = \frac{\rho C_W}{\rho C_A} \cdot \frac{U \cdot dt}{dx} \quad [22]$$

Compte tenu que le nombre adimensionnel qui apparaît en 1D pour le phénomène de conduction est :

$$Z = \frac{x}{\sqrt{4D_{th} \cdot t}} \quad [23]$$

On déduit le temps caractéristique t_D , ou réciproquement la distance caractéristique x_D correspondant à l'inertie relative à la seule conduction :

$$t_D = \frac{x^2}{4D_{th}} \quad [24]$$

$$x_D = \sqrt{4D_{th} \cdot t} \quad [25]$$

2.6 Comparaison avec l'équation de l'hydrodynamique (quand la conduction est prépondérante, c'est-à-dire quand la vitesse est négligeable)

L'équation de l'hydrodynamique, permettant de calculer les charges **H**, et les débits de fluides s'écrit, en notant **K** la perméabilité à l'eau et **S_s** le coefficient d'emmagasinement spécifique :

$$K \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = S_s \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad [26]$$

En comparant avec l'équation [12] du transfert d'énergie, avec $U = 0$, on identifie immédiatement :

$$K_{th} = \lambda_{AG} \quad [27]$$

$$(S_s)_{th} = \rho C_A \quad [28]$$

$$Q_{th} = Q_{\text{énergie}} \quad [29]$$

En conduction pure, quand la vitesse est négligeable, il est donc possible d'utiliser les solutions de l'hydrodynamique, par exemple la solution de Theis pour décrire l'injection d'un flux de chaleur dans un puits.

2.7 Résumé des notations complémentaires

- V = Volume du volume élémentaire de référence. [L³]
- V_V = Volume d'un volume élémentaire voisin. [L³]
- A = Surface d'échange entre les volumes V et V_V . [L²]

- L = Distance entre les centres des 2 volumes. [L]
- Q = Débit d'échange (> 0 si entrant dans le volume de référence). [L^3T^{-1}]
- U = Vitesse de Darcy = Q / A [LT^{-1}]
- Q_A = Flux d'énergie apporté par convection (advection). [W]
- Q_C = Flux d'énergie apporté par conduction. [W]
- Q_I = Flux d'énergie injectée. [W]
- Q_S = Flux d'énergie stockée. [W]
- λ_A = Conductivité thermique de l'aquifère au repos. [W/m/K]
- λ_{AG} = Conductivité thermique globale (équivalente) l'aquifère. [W/m/K]
- ρC_A = Chaleur spécifique de l'aquifère. [$J/m^3/K$]
- ρC_{AP} = Chaleur spécifique de l'aquifère en début de pas de temps. [$J/m^3/K$]
- dt = Durée d'un pas de temps. [T]
- θ_p = Teneur en eau volumique au début du pas de temps. [-]
- T_p = Température au début du pas de temps. [$^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$]
- C = Concentration. [ML^{-3}]
- D = Coefficient de diffusion. [L^2T^{-1}]
- Pe = Nombre de Péclet. [-]
- Cr = Nombre de Courant. [-]
- ω_{th} = Porosité thermique (équivalente). [-]
- D_{th} = Coefficient de diffusion thermique. [L^2T^{-1}]
- u_{th} = Vitesse thermique. [LT^{-1}]
- R_{th} = Retard thermique. [-]
- t_D = Temps caractéristique pour la conduction [T]
- x_D = Distance caractéristique pour la conduction. [L]

3 Validation par comparaison à des solutions analytiques

3.1 Exemple n°1 : Conduction pure en radial. Régime permanent

Cet exemple est tiré de Kolditz et Shao (2010). Il s'agit d'un anneau horizontal de rayon interne égal à 1 m, et de rayon externe 5 m. La température externe est fixée à 25 °C. La face intérieure (de rayon 1 m) reçoit un flux d'énergie égal à 30 W / m².

On modélise cet exemple avec une géométrie radiale en 1D sur une épaisseur de 1 mètre. Les 4 mètres compris entre les 2 faces sont découpés en 41 mailles (radiales) de 0.1 m de largeur. On a 41 mailles car les conditions aux limites sont imposées au centre des mailles limites. La maille interne reçoit le flux d'énergie sur une aire égale à $1 \times 1 \times 2 \times \pi$, soit 6.2832 m². Le flux d'énergie apporté est donc égal à 188.496. Les caractéristiques de cet exemple sont donc les suivantes :

- ω = Porosité = 0. (on prend 10⁻⁵ %)
- b = Épaisseur verticale du domaine = 1 m
- R_1 = Rayon interne = 1 m
- R_L = Rayon externe = 5 m
- Q_E = Flux d'énergie injecté = 188.496 W
- T_L = Température de la limite externe = 25°C
- λ_M = Conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse = 5.5 W/m/K

La solution analytique, qui donne la température T en fonction du rayon r , est évidente :

$$T(r) = T_L + \frac{R_1 \cdot Q_E}{\lambda_M} \cdot \ln\left(\frac{R_L}{r}\right) \quad (Q_E \text{ étant exprimé en } W / m^2)$$

La figure 1 montre, par comparaison avec la solution analytique, que la simulation de cet exemple simple est correcte.

Pour vérifier la prise en compte des hétérogénéités, on a légèrement compliqué cet exemple en introduisant un anneau 10 fois moins conducteur, soit 0.55 W/m/K, entre les rayons 3 m et 3.2 m. La maillage a été raffiné à proximité de l'anneau moins conducteur par des mailles de 0.01 à 0.03 m. Le maillage fait intervenir 51 mailles. La solution analytique s'établit très facilement.

La figure 2 montre, par comparaison avec la solution analytique, que la simulation de cet exemple hétérogène est correcte.

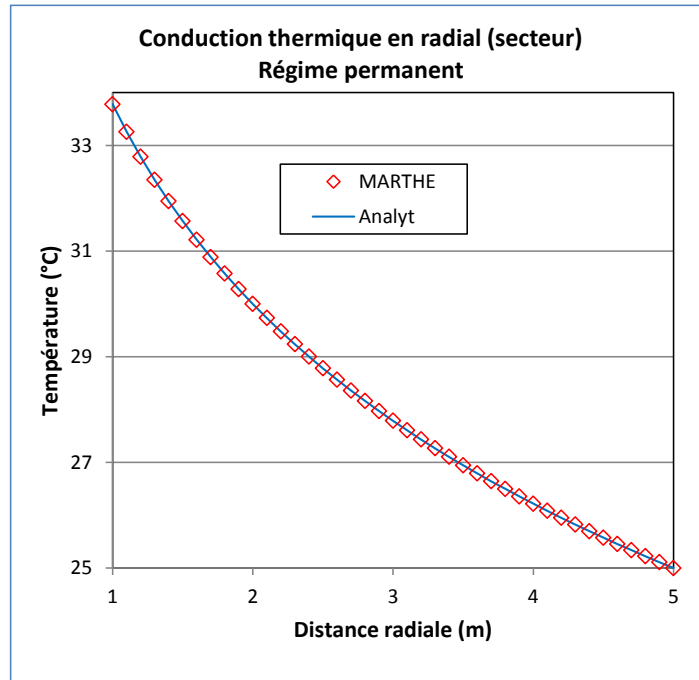


Figure 1 : Simulation avec le code de calcul MARTHE de la conduction thermique en écoulement radial avec injection d'un flux thermique. Domaine uniforme. Comparaison avec la solution analytique logarithmique.

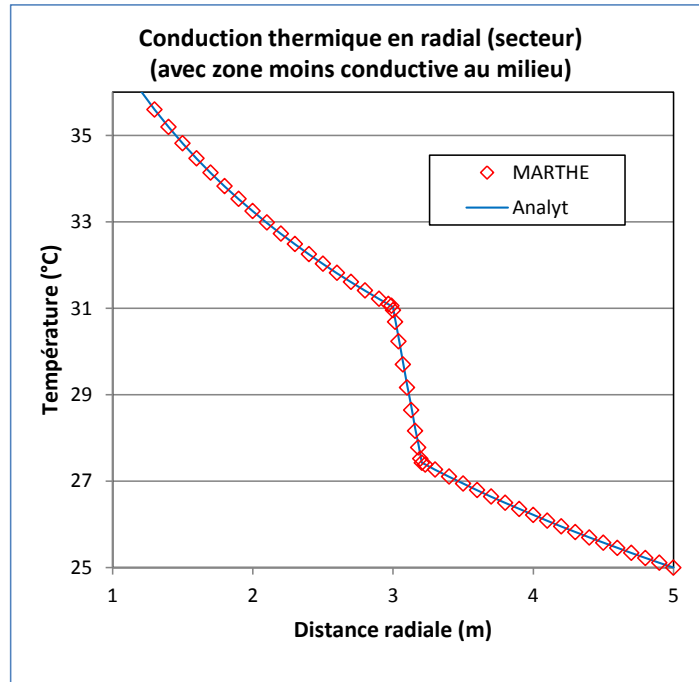


Figure 2 : Simulation avec le code de calcul MARTHE de la conduction thermique en écoulement radial avec injection d'un flux thermique. Domaine hétérogène. Comparaison avec la solution analytique logarithmique.

3.2 Exemple n°2 : Diffusion thermique à travers un mur en régime transitoire

Cet exemple est tiré de Kolditz et Shao (2010). Il s'agit d'un « mur » de 4 m de largeur. La température est fixée à 25 °C sur la face de droite. La face de gauche reçoit un flux d'énergie égal à 30 W / m². On modélise cet exemple en 1D au moyen de 81 mailles de 0.05 m de largeur et de surface verticale 1 m². Les pas de temps sont tous égaux de durée 5000 s. Les caractéristiques de cet exemple sont donc les suivantes :

- ω = Porosité = 0. (on prend 10⁻⁵ %)
- b = Épaisseur verticale du domaine = 1 m
- L = Largeur du « mur » = 4 m
- Q_E = Flux d'énergie injecté = 30 W
- T_L = Température de la limite externe = 25°C
- ρC_M = Chaleur spécifique volumique du minéral = 1.8 10⁶ J/m³/K
- λ_M = Conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse = 5.5 W/m/K

La solution analytique obtenue par la méthode de Fourier est :

$$T_d = (1 - x_d) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos \left[\frac{(2n-1) \cdot \pi \cdot x_d}{2} \right] \cdot \exp[-(2n-1)^2 \cdot \pi^2 \cdot t_d]$$

Avec les variables adimensionnelles :

$$T_d = [T(x, t) - T_L] \cdot \frac{\lambda_M}{Q_E \cdot L} \quad (Q_E \text{ étant exprimé en W / m}^2)$$

$$D = \frac{\lambda_M}{\rho C_M}$$

$$x_d = \frac{x}{L}$$

$$t_d = \frac{D \cdot t}{4 \cdot L^2}$$

La figure 3 compare les profils de température après $5 \cdot 10^5$, 10^6 et $2 \cdot 10^6$ secondes calculés par MARTHE avec les profils calculés avec la solution analytique. Elle montre que la simulation de cet exemple est correcte.

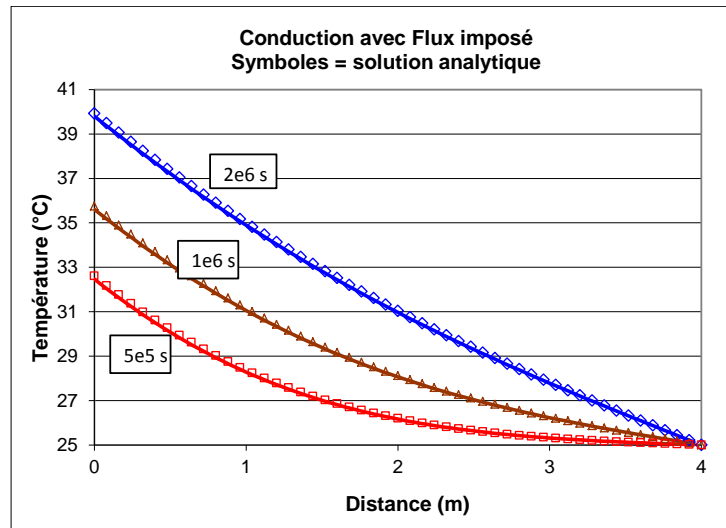


Figure 3 : Simulation avec le code de calcul MARTHE de la diffusion thermique à travers un mur avec injection d'un flux thermique sur une paroi. Comparaison avec la solution analytique logarithmique.

3.3 Exemple n°3 : Pompage d'énergie sur une paroi en milieu infini - régime transitoire. Milieu saturé ou non saturé.

Dans un milieu aquifère infini, saturé ou non saturé en eau, on prélève de l'énergie sur un plan vertical. On calcule la diminution de température dans le milieu. La température initiale est égale à 15 °C. On prélève un flux d'énergie de 5 W / m² dans une fracture verticale plane. En fait il suffit de considérer un milieu semi-infini dans lequel on prélève un flux de 2.5 W / m² sur la face de gauche. En fait on a choisi de modéliser le milieu infini comme un domaine de 100 m sur l'axe des x. Les 100 mètres sont discrétisés en 1D au moyen de 101 mailles de 1 m de largeur et de surface verticale 1 m². On y prélève donc 5 W dans la maille du centre. La période modélisée est de 365 jours par 365 pas de temps de 1 jour. Les caractéristiques de cet exemple sont les suivantes :

- ω = Porosité = 0.20
- θ_1 = Teneur en eau : premier calcul en milieu saturé = 0.20
- θ_2 = Teneur en eau : deuxième calcul en milieu non-saturé = 0.01
- b = Épaisseur aquifère = 1 m
- Q_E = Flux d'énergie prélevé = 5 W
- T_A = Température initiale de l'aquifère = 15°C
- ρ_W = Masse volumique de l'eau = 1000 kg/m³
- C_W = Chaleur spécifique de l'eau = 4185 J/kg/K
- ρC_M = Chaleur spécifique volumique du minéral = 2.2 10⁶ J/m³/K
- λ_W = Conductivité thermique de l'eau = 0.6 W/m/K

- λ_M = Conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse = 2 W/m/K
- α_L = Dispersivité thermique longitudinale = 0 m

De ces données on déduit :

- $\rho C_W = \rho_W \cdot C_W$ = Chaleur spécifique volumique de l'eau = 4.185 10⁶ J/m³/K

Soit pour le premier calcul en milieu saturé :

- $\rho C_{A1} = \theta_1 \cdot \rho C_W + (1 - \omega) \cdot \rho C_M$ = 2.597 10⁶ J/m³/K
- $\lambda_{A1} = \theta_1 \cdot \lambda_W + (1 - \omega) \cdot \lambda_M$ = 1.72 W/m/K
- D_{th1} = Coefficient de diffusion thermique = 6.623 10⁻⁶ m²/s
- ω_{th1} = Porosité thermique (équivalente) = 0.62055

Soit pour le deuxième calcul en milieu non-saturé :

- $\rho C_{A2} = \theta_2 \cdot \rho C_W + (1 - \omega) \cdot \rho C_M$ = 1.8019 10⁶ J/m³/K
- $\lambda_{A2} = \theta_2 \cdot \lambda_W + (1 - \omega) \cdot \lambda_M$ = 1.606 W/m/K
- D_{th2} = Coefficient de diffusion thermique = 8.9131 10⁻⁶ m²/s
- ω_{th2} = Porosité thermique (équivalente) = 0.43055
- Soit pour le deuxième calcul en milieu non-saturé :

La solution analytique est établie en annexe.

$$T(x, t) = \frac{F}{\lambda} \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\frac{\sqrt{4D \cdot t}}{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D \cdot t}} \right) \right]$$

F étant le flux d'énergie sur la paroi (W / m²)

La figure 4 compare les profils de température en milieu saturé calculés par MARTHE à 10 j, 50 j, 100 j, 150 j, 200 j, 300 j et 365 j avec les profils calculés avec la solution analytique. Elle montre que la simulation de cet exemple est correcte.

La figure 5 compare les profils de température en milieu non-saturé aux mêmes dates. Elle montre que la simulation de cet exemple en milieu non-saturé est correcte.

La figure 6 compare les profils de température à 365 jours en milieu saturé et en milieu non-saturé. Logiquement la baisse de température est plus grande en milieu non-saturé puisque la conductivité thermique y est diminuée, bien que la diffusion thermique y soit augmentée.

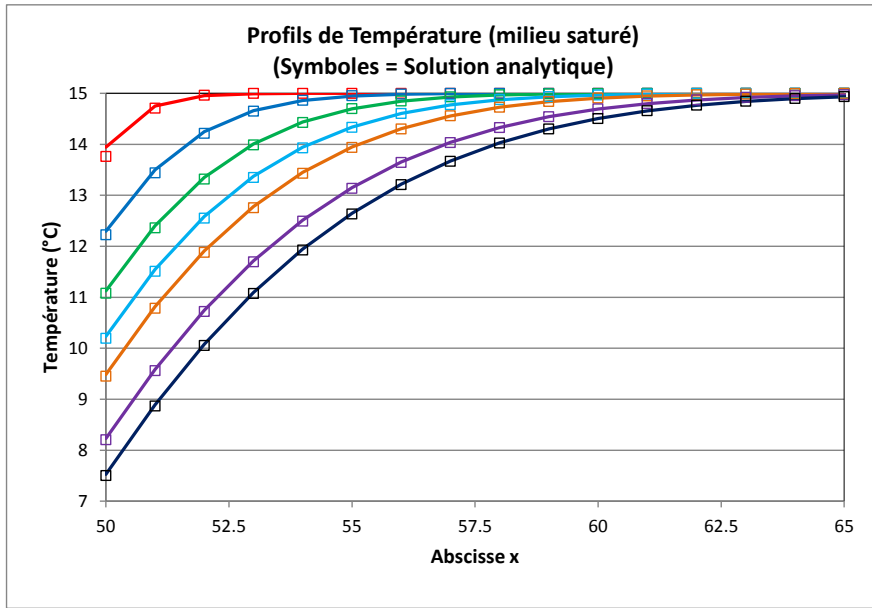


Figure 4 : Milieu saturé. Simulation avec le code de calcul MARTHE d'un pompage d'énergie en milieu infini. Profils de température à 10 j, 50 j, 100 j, 150 j, 200 j, 300 j et 365 j. Comparaison avec la solution analytique (symboles).

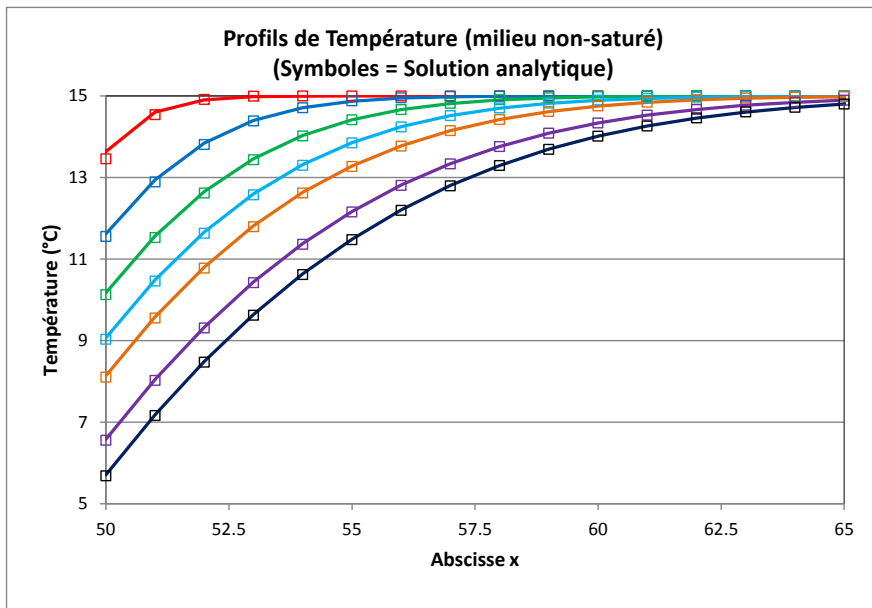


Figure 5 : Milieu non-saturé. Simulation avec le code de calcul MARTHE d'un pompage d'énergie en milieu infini. Profils de température à 10 j, 50 j, 100 j, 150 j, 200 j, 300 j et 365 j. Comparaison avec la solution analytique (symboles).

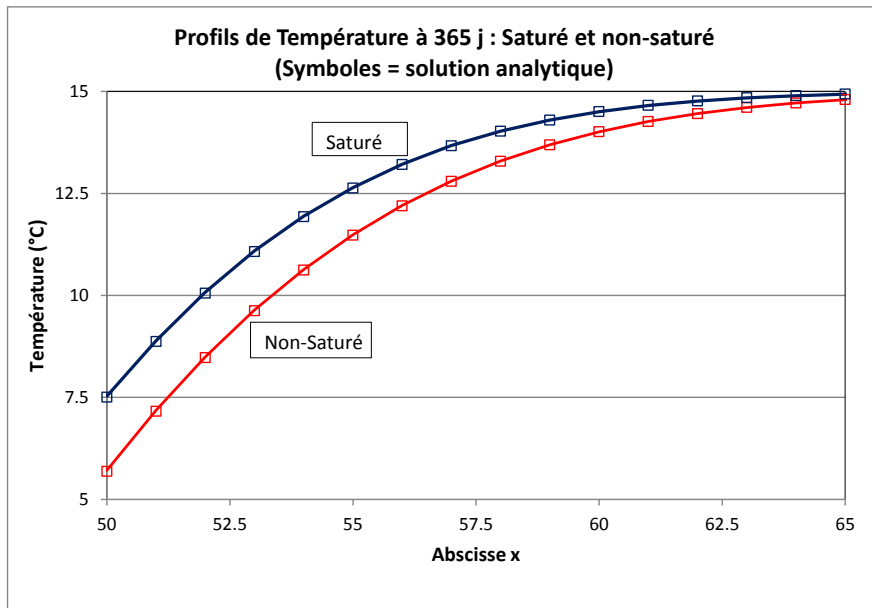


Figure 6 : Milieu saturé et non-saturé. Simulation avec le code de calcul MARTHE d'un pompage d'énergie en milieu infini. Profils de température à 365 j. Comparaison avec la solution analytique (symboles).

3.4 Exemple n°4 : Pompage d'énergie dans un puits en milieu infini - régime transitoire. Milieu non-saturé.

Dans un milieu aquifère infini non-saturé eau, on prélève de l'énergie dans un forage de faible vertical diamètre. On calcule la diminution de température dans le milieu. Comme dans l'exemple précédent la température initiale est égale à 15 °C. On prélève un flux d'énergie de 5 W / m de forage. On a modélisé le milieu infini par un maillage radial 1D de 31.66 m d'extension, avec 40 mailles de largeur radiale augmentant de 0.03 mètre à 1 mètre. La période modélisée est de 365 jours par 365 pas de temps de 1 jour. Les caractéristiques de cet exemple exactement les mêmes que celles de l'exemple précédent non-saturé.

La solution exacte de cet exemple est la formule classique de Theis en remplaçant la charge par la température :

$$T(r, t) = \frac{Q_E}{4\pi\lambda_A} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} \cdot du = \frac{Q_E}{4\pi\lambda_A} W(u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\rho C_A \cdot r^2}{4\lambda_A \cdot t} = \frac{r^2}{4Dt}$$

(Q_E étant exprimé en W / m de forage)

$$D = \frac{\lambda_A}{\rho C_A}$$

La figure 7 compare l'évolution de la température calculée par MARTHE à différentes distances avec les évolutions calculées avec la solution analytique. Elle montre que la simulation de cet exemple est très précise.

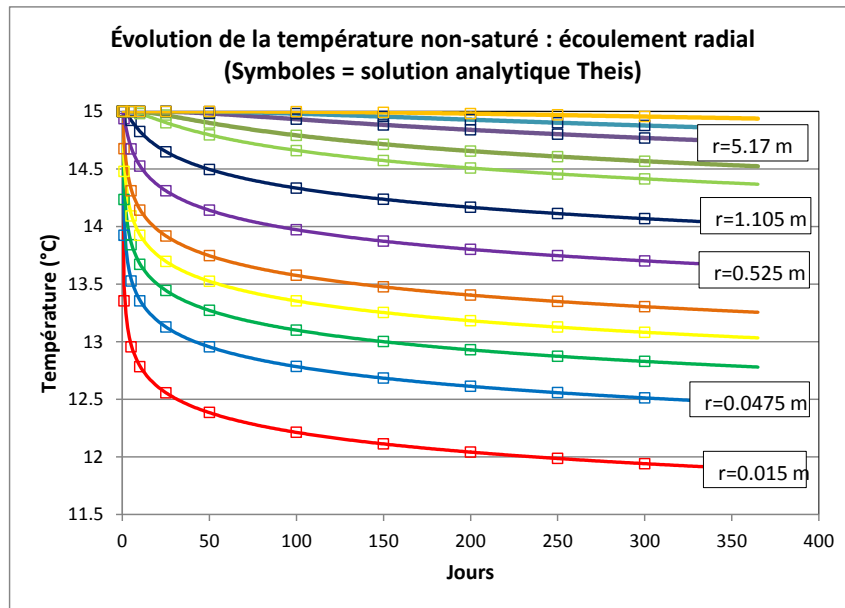


Figure 7 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'un pompage d'énergie dans un forage en milieu infini non-saturé. Évolution de la température à différentes distances. Comparaison avec la solution analytique (symboles).

3.5 Exemple n°5 : Injection d'eau chaude dans un milieu aquifère saturé (ou une fracture) compris entre 2 épontes rocheuses - régime transitoire. Hypothèses de Lauwerier (1955).

Dans une couche aquifère horizontale (ou une fracture) infinie, saturée en eau, d'épaisseur b , à température uniforme T_0 , on injecte un débit d'eau à température T_L . On admet 2 hypothèses restrictives :

- Dans la fracture la chaleur est transportée uniquement par convection (advection), la conductivité thermique de l'eau et de l'aquifère dans la direction horizontale est donc supposée être nulle.
- Dans l'éponte la chaleur est transportée uniquement par diffusion (conduction) dans la direction oz (pas dans la direction ox).

Bien que les dimensions soient infinies, on considère un domaine fini suffisamment grand pour que les limites ne se fassent pas sentir.

Les caractéristiques de cet exemple, tiré de Kolditz et Shao (2010), sont les suivantes :

- ω_F = Porosité dans la fracture = 99.999 %
- ω_R = Porosité dans l'éponte = 10^{-5} %
- b = Épaisseur totale de la fracture sur oz = $2 \cdot 10^{-3}$ m
- Q_S = Débit d'injection par unité de surface (c'est la vitesse de Darcy U) = $1 \cdot 10^{-4}$ m/s
- T_0 = Température initiale = 0°C
- T_L = Température de l'eau injectée = 1°C
- ρ_W = Masse volumique de l'eau = 1000 kg/m^3
- C_W = Chaleur spécifique de l'eau = 4000 J/kg/K
- ρC_M = Chaleur spécifique volumique du minéral = $2.5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- λ_M = Conductivité thermique du minéral de l'éponte = 1 W/m/K
- α_L = Dispersivité thermique longitudinale = 0 m
- Largeur sur ox du domaine modélisé = 40 m

- Hauteur verticale sur oz de chaque éponte modélisée = 32 m
- Épaisseur de la tranche sur oy = 1 m

De ces données on déduit :

- $\rho C_W = \rho_W \cdot C_W =$ Chaleur spécifique volumique de l'eau = $4 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- $\rho C_F = \omega_F \cdot \rho C_W + (1 - \omega_F) \cdot \rho C_M$ (Chal. Spécifique fracture) = $4 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- $\rho C_R = \omega_R \cdot \rho C_W + (1 - \omega_R) \cdot \rho C_M$ (Chal. Spécifique éponte) = $2.5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- $\lambda_R = \omega_R \cdot \lambda_W + (1 - \omega_R) \cdot \lambda_M$ = 1 W/m/K

On en déduit, pour comparaison avec une modélisation de transport de masse :

- $D_{th} =$ Coefficient de diffusion thermique dans l'éponte = $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
- $Pe =$ Nombre de Péclet numérique = 0.25

Le système étant symétrique, on modélise uniquement la moitié supérieure du domaine, c'est à dire la demi-épaisseur de la fracture et l'éponte supérieure de 40 m de hauteur. La section de la $\frac{1}{2}$ fracture est donc égale à $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ d'où un débit injecté dans la demi-fracture égal à $1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$.

Le maillage 2D est constitué de 75 colonnes et 49 Lignes. Les colonnes varient de 0.001 m près de la limite de gauche à 0.5 m. Les lignes varient de 0.001 m (largeur de la fracture) à 1 m. L'écoulement est modélisé pendant une période totale de $5 \cdot 10^8$ secondes (15.84 ans) découpée en 5000 pas de temps de 10^5 secondes (1.157 jour).

Le nombre de Péclet numérique varie de 0.25 sur la limite amont à $5 \cdot 10^{-4}$ sur la plus grande partie de la fracture. Le nombre de Courant numérique dans la fracture varie de 10^4 sur la limite amont à 20 sur la plus grande partie de la fracture.

Dans MARTHE v7.4, il n'est pas possible de prendre en compte les hypothèses de Lauwerier qui sont théoriques, c'est-à-dire d'annuler la conduction dans direction ox, en la conservant dans la direction oy. Pour simuler cet exemple théorique, on a donc utilisé une version spéciale du code dans laquelle on a annulé la conduction sur ox.

La solution analytique de Lauwerier (1955) peut être exprimée de plusieurs manières :

On note :

$U_w =$ Flux injecté (m/s)

$d = b / 2 = \frac{1}{2}$ épaisseur de la fracture

$x_d = \frac{\lambda_R \cdot x}{\rho C_W \cdot U_w \cdot d^2}$ Abscisse adimensionnelle

$y_d = \frac{y}{d}$ Ordonnée adimensionnelle (sur oz)

$t_d = \frac{\lambda_R \cdot t}{\rho C_F \cdot d^2}$ Temps adimensionnel

$T_d = \frac{T - T_0}{T_I - T_0}$ Température adimensionnelle

$\phi = \frac{\rho C_F}{\rho C_R}$

La solution s'écrit alors :

Si $t_d < x_d$ $T_d = 0$

Si $t_d > x_d$ $T_d = \text{erfc} \left[\frac{x_d + \max(y_d - 1, 0)}{2\sqrt{\phi \cdot (t_d - x_d)}} \right]$

En particulier dans la fracture ($y_d < 1$) :

$$T_d = \operatorname{erfc} \left[\frac{x_d}{2\sqrt{\phi \cdot (t_d - x_d)}} \right]$$

En radial, on obtient la même formule en remplaçant x_d par r_d , le rayon adimensionnel défini par :

$$r_d = \frac{\lambda_R \cdot \pi \cdot r^2}{\rho C_W \cdot Q_{Wtot} \cdot d} \quad \text{Rayon adimensionnel}$$

avec Q_w = débit total injecté (m^3/s)

Une autre formulation, donnée par Kolditz et Shao (2010) avec d'autres nombres adimensionnels est :

$$x_{d2} = \frac{x}{2d} \quad \text{Abscisse adimensionnelle}$$

$$y_{d2} = \frac{y}{2d} \quad \text{Ordonnée adimensionnelle (sur oz)}$$

$$t_{d2} = \frac{u_x \cdot t}{2d} \quad \text{Temps adimensionnel}$$

$$\alpha = \frac{\lambda_R}{\rho C_F} \cdot \frac{1}{2d \cdot u_x}$$

$$\beta = \frac{\lambda_R}{\rho C_W} \cdot \frac{1}{2d \cdot u_x}$$

Cette deuxième formulation s'écrit alors :

$$T_d = \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha \cdot (t_{d2} - x_{d2})}} \cdot \left[x_{d2} + \frac{1}{2\beta} \cdot \left(y_{d2} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

Les figures 8 et 9 comparent les profils de température calculée par MARTHE à 4 dates avec les profils de la solution analytique. Elle montre que la simulation de cet exemple exacte.

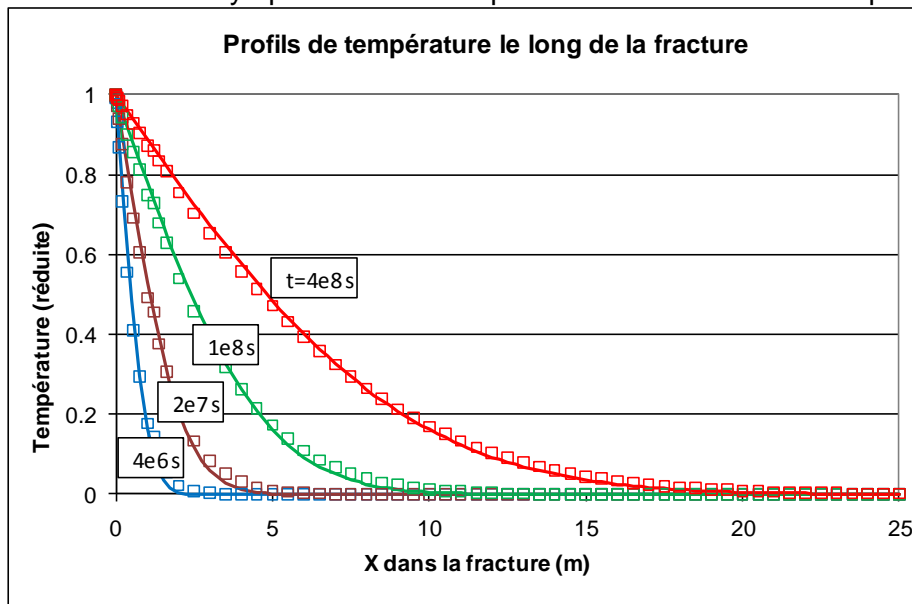


Figure 8 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau chaude dans une fracture (hypothèses de Lauwerier). Profils température le long de la fracture après $4 \cdot 10^6$ s (46.3 j), $2 \cdot 10^7$ s (231.5 j), 10^8 s (3.17 ans) et $4 \cdot 10^8$ s (12.68 ans). Comparaison avec la solution analytique (trait continu).

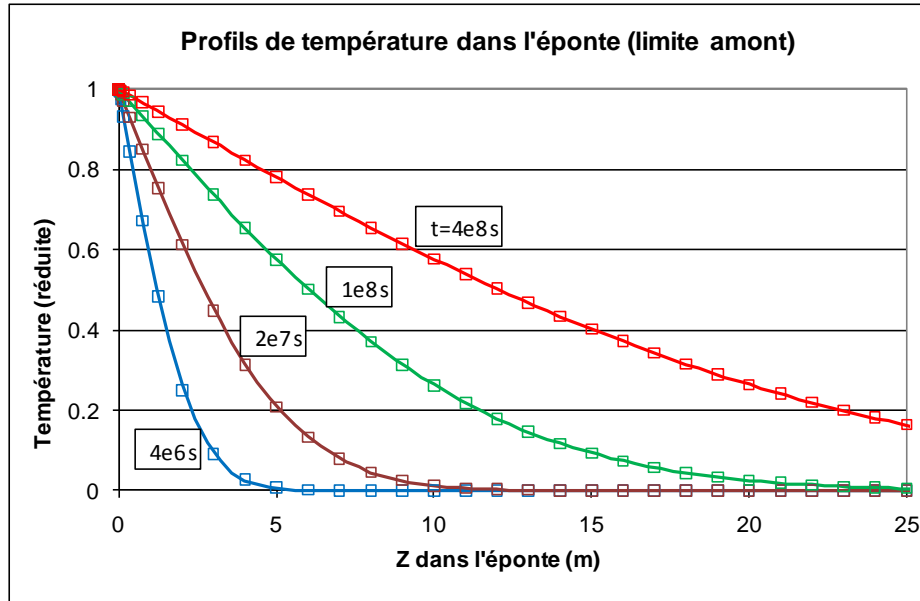


Figure 9 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau chaude dans une fracture (hypothèses de Lauwerier). Profils température dans l'éponte, en $x=0$, après $4 \cdot 10^6$ s (46.3 j), $2 \cdot 10^7$ s (231.5 j), 10^8 s (3.17 ans) et $4 \cdot 10^8$ s (12.68 ans). Comparaison avec la solution analytique (trait continu).

3.6 Exemple n°6 : Injection d'eau chaude dans un forage

Les caractéristiques de cet exemple tiré de la littérature (Updegraff 1989) sont les suivantes : Injection d'eau à 160°C par un forage dans un aquifère initialement à 170°C .

- ω = Porosité = 0.20
- b = Épaisseur aquifère = 100 m
- Q = Débit d'injection = $11.047 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
= 10 kg/s
- T_A = Température aquifère initiale = 170°C
- T_I = Température de l'eau injectée = 160°C
- ρ_W = Masse volumique de l'eau = 905.24 kg/m^3
- C_W = Chaleur spécifique de l'eau = 4336.88 J/kg/K
- ρC_M = Chaleur spécifique volumique du minéral = $1.7147 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- λ_W = Conductivité thermique de l'eau = 0.6 W/m/K
- λ_M = Conductivité thermique du minéral de la matrice poreuse = 20 W/m/K
(Cette valeur de 20 W/m/K est peu réaliste puisque en pratique, suivant le matériau, elle est généralement de l'ordre de 1 à 2.5 W/m/K)
- α_L = Dispersivité thermique longitudinale = 0 m

De ces données on déduit :

- $\rho C_W = \rho_W \cdot C_W$ = Chaleur spécifique volumique de l'eau = $3.9259 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- $\rho C_A = \omega \cdot \rho C_W + (1 - \omega) \cdot \rho C_M$ = $2.15694 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{K}$
- $\lambda_A = \omega \cdot \lambda_W + (1 - \omega) \cdot \lambda_M$ = 16.12 W/m/K

On en déduit, pour comparaison avec une modélisation de transport de masse :

- D_{th} = Coefficient de diffusion thermique = $7.4735 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- ω_{th} = Porosité thermique (équivalente) = 0.54941

3.6.1 Modélisation en radial

L'écoulement est modélisé en 1D radial avec le code de calcul MARTHE.

Un rayon total de 1000 mètres est discrétisé en 127 mailles (couronnes cylindriques) de rayon croissant de 10^{-4} m à 68 m avec une raison géométrique de 1.07. L'écoulement a été simulé avec 160 pas de 0.2 ans pendant 32.69 ans, soit 10^9 secondes. Une solution analytique de Avdonin (1964), décrite par Updegraff (1989), correspond à une telle injection en radial, en négligeant les variations de densité et de viscosité avec la température et en négligeant la conduction des épontes (épontes adiabatiques). La figure 10 montre le profil de température calculé après 10^9 secondes (32.69 ans). Pour cette durée de 10^9 s, la distance caractéristique x_p est égale à 172.9 m. Les valeurs simulées sont extrêmement proches de la solution analytique.

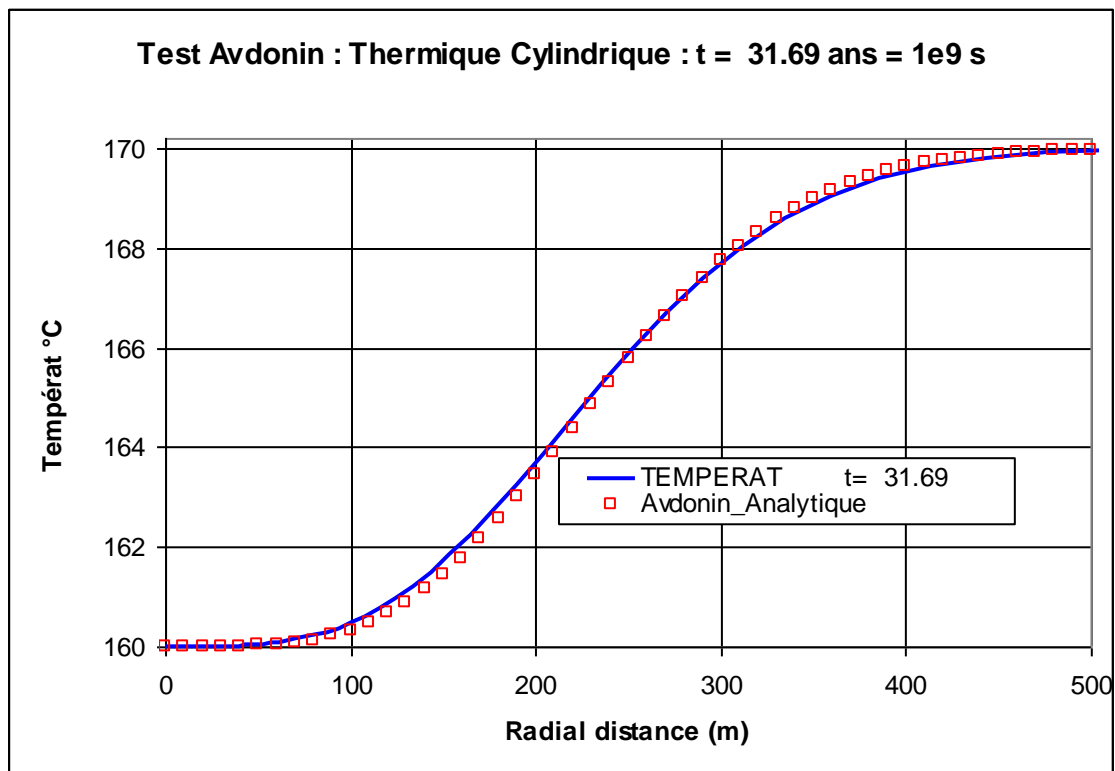


Figure 10 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau à 160°C dans un forage implanté dans un aquifère initialement à 170°C. Profil après 10^9 secondes. Comparaison avec la solution analytique d'Avdonin (1964).

Pour ce calcul, le nombre de Péclet numérique moyen est égal à 0.509, et le nombre de Courant numérique moyen est égal à $3.2 \cdot 10^8$ (avec une valeur maximale de $4 \cdot 10^{10}$ dans la maille d'injection).

On a également calculé l'évolution de la température au cours du temps à la distance 37.37 m. Pour cette distance de 37.37 m, le temps caractéristique t_p est égal à $4.67 \cdot 10^7$ s, soit 1.48 an. Pour obtenir une simulation plus précise à cette petite distance du rayon d'injection, où les vitesses sont très grandes, on a utilisé des pas de temps 10 fois plus fins (0.02 ans) pendant les 2 premières années. La figure 11 montre que les valeurs simulées sont extrêmement proches de la solution analytique d'Avdonin.

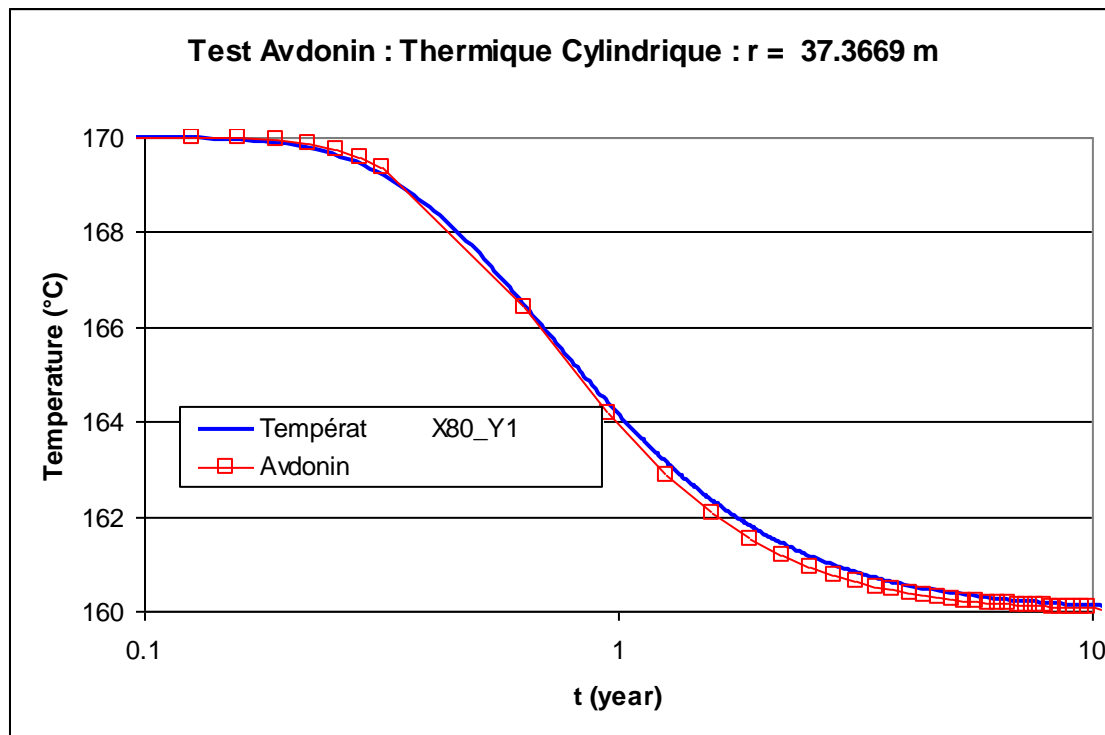


Figure 11 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau à 160°C dans un forage implanté dans un aquifère initialement à 170°C. Évolution à 37.37 m de distance. Comparaison avec la solution analytique d'Avdonin (1964).

À titre de vérification un calcul identique de transfert de masse à été réalisé avec les paramètres suivants :

- D = Coefficient de diffusion $= D_{th} = 7.4735 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- ω = Porosité $= \omega_{th} = 0.54941$

Les résultats obtenus sont exactement les mêmes ce qui conforte les calculs de transferts thermiques.

3.6.2 Modélisation en 1D

L'écoulement est modélisé en 1D avec le code de calcul MARTHE.

Une longueur totale de 40 mètres sur l'axe ox est discrétisée en 400 mailles égales de longueur $dx = 0.1 \text{ m}$, et de largeur $dy = 1 \text{ m}$. Compte tenu de l'épaisseur de 100 m, la section est égale à 100 m^2 . La vitesse de Darcy est donc égale à $11.047 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ et la vitesse réelle à $55.235 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$. La vitesse thermique est égale à $20.107 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$. Le coefficient de retard thermique est égal à 2.747. L'écoulement a été simulé avec 370 pas de 0.1 heure (360 secondes) pendant 36.111 heures, soit $1.3 \cdot 10^5$ secondes. Compte tenu de la vitesse thermique, la distance parcourue par le front thermique est égale à 26.1 m. Une solution analytique décrite par Coats et Smith (1964) correspond à un tel écoulement 1D, en négligeant les variations de densité et de viscosité avec la température et en négligeant la conduction des épontes (épontes adiabatiques). Compte tenu de la valeur du nombre de Péclet numérique, égal à 2.69, on a utilisé la méthode de transport TVD du code de calcul MARTHE. La figure 12 montre le profil de température calculé après $1.3 \cdot 10^5$ secondes (36.111 heures). Les valeurs simulées sont extrêmement proches de la solution analytique et ne présentent pas de dispersion numérique.

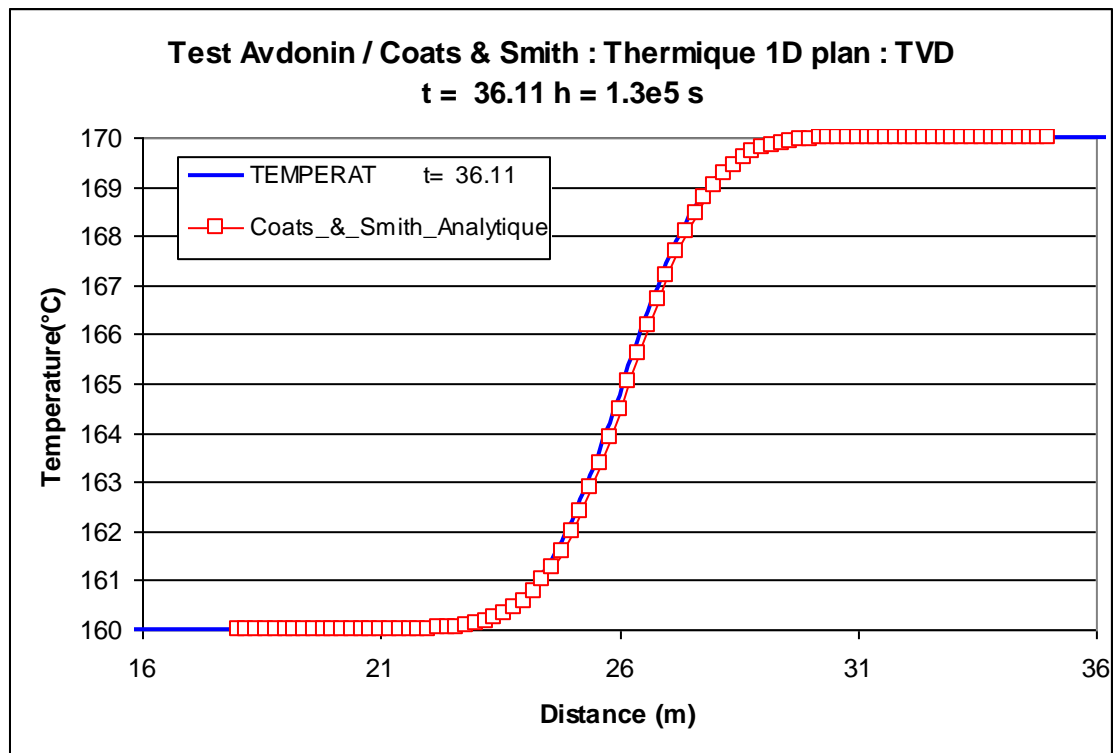


Figure 12 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau à 160°C en 1D dans un aquifère initialement à 170°C. Profil après $1.3 \cdot 10^5$ secondes. Comparaison avec la solution analytique de Coats et Smith (1964).

Pour ce calcul, le nombre de Péclet numérique est égal à 2.69, et le nombre de Courant numérique est égal à 0.724.

On a également calculé l'évolution de la température au cours du temps à la distance 20 m (soit un temps de 27.6 heures pour le front thermique). La figure 13 montre que les valeurs simulées sont extrêmement proches de la solution analytique de Coats et Smith.

Un autre calcul a été réalisé avec un maillage deux fois plus grossier (mailles de 0.2 m de longueur), et un pas de temps plus grossier, de 0.2 heures. Le nombre de Péclet numérique est alors égal à 5.38, et le nombre de Courant numérique est égal à 0.724. La figure 14 montre que malgré le grand nombre de Péclet, la simulation est très précise.

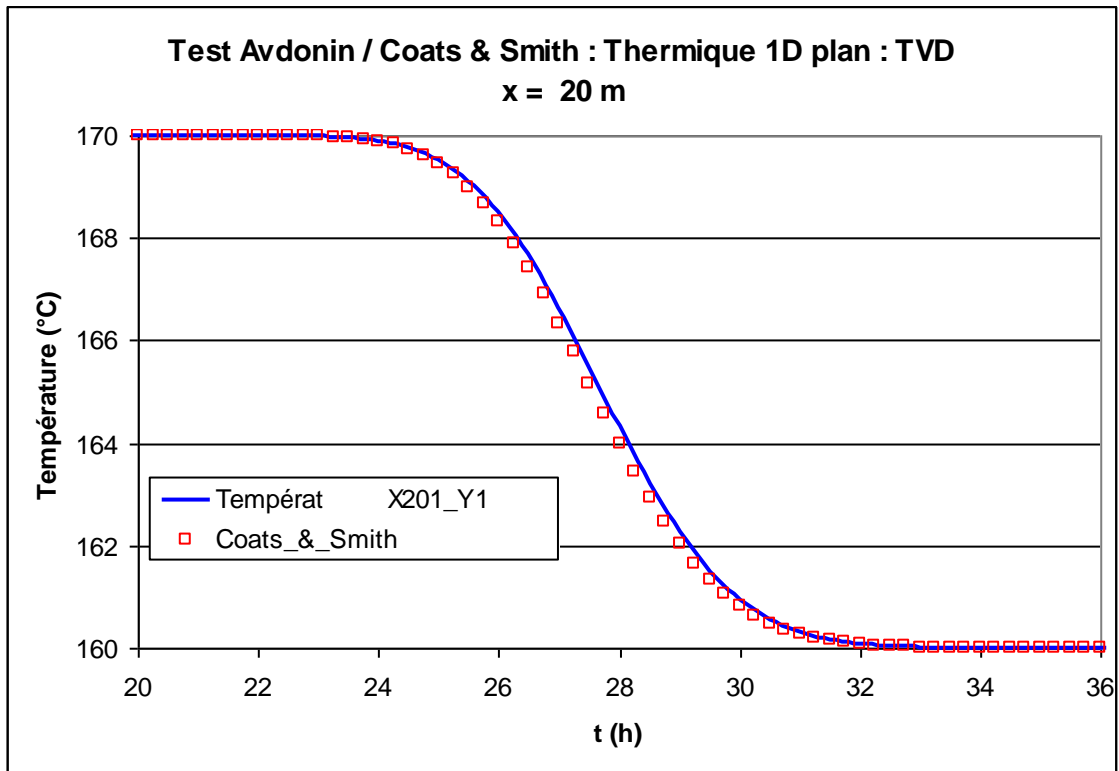


Figure 13 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau à 160°C en 1D dans un aquifère initialement à 170°C. Évolution de la température à 20 m de distance. Comparaison avec la solution analytique de Coats et Smith (1964).

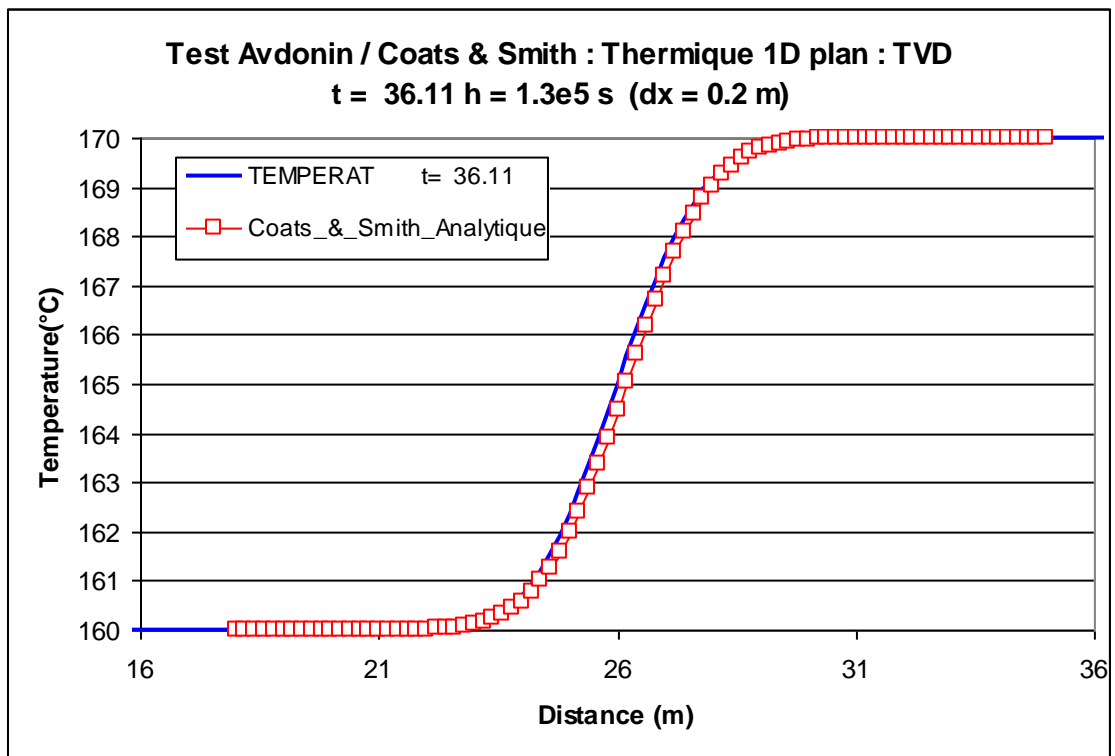


Figure 14 : Simulation avec le code de calcul MARTHE d'une injection d'eau à 160°C en 1D dans un aquifère initialement à 170°C. Profil de température après $1.3 \cdot 10^5$ secondes. Maillage grossier (nombre de Péclet = 5.38). Comparaison avec la solution analytique de Coats et Smith (1964).

4 Solutions analytiques

On note T_d la température adimensionnelle : $T_d = (T - T_A) / (T_1 - T_A)$
avec : T_A = Température initiale de l'aquifère et T_1 = Température de l'eau injectée.

4.1 Solution analytique de Avdonin (1964)

La solution en fonction du temps t et de la distance r s'écrit :

$$T_d = 1 - \Gamma\left(\frac{Q}{4\pi \cdot b \cdot \omega_{th} \cdot D_{th}}, \frac{r^2}{4 \cdot D_{th} \cdot t}\right) \quad [30]$$

$\Gamma(a, b)$ étant la fonction « Gamma incomplète »

4.2 Solution analytique de Coat et Smith (1964)

La solution en fonction du temps t et de l'abscisse x s'écrit :

$$T_d = 0.5 \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_{th} \cdot t}{\sqrt{4 \cdot D_{th} \cdot t}}\right) + \exp\left(\frac{u_{th} \cdot x}{D_{th}}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x + u_{th} \cdot t}{\sqrt{4 \cdot D_{th} \cdot t}}\right) \right] \quad [31]$$

$\operatorname{erfc}()$ étant la fonction « erreur complémentaire »

ou encore, en variables adimensionnelles :

$$T_d = 0.5 \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1 - C_r}{\sqrt{4 \cdot C_r / Pe}}\right) + \exp(Pe) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1 + C_r}{\sqrt{4 \cdot C_r / Pe}}\right) \right] \quad [32]$$

en notant ici :

$$C_r = \frac{u_{th} \cdot t}{x} \quad \text{et} \quad Pe = \frac{u_{th} \cdot x}{D_{th}}$$

4.3 Solution analytique pour une colonne infinie recevant un flux de chaleur à une extrémité - régime transitoire

Dans ce cas monodimensionnel, on prend comme condition initiale $T_0 = 0$ et on introduit à l'origine une injection instantanée d'un Dirac de chaleur $P = \delta(t)\delta(x)$, « $\delta()$ » étant la fonction « Dirac », on obtient alors :

$$T(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

L'énergie E (c'est à dire la chaleur) à tout instant t est obtenue par l'intégrale sur l'abscisse x

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho C \cdot T \cdot dx$$

$$E(t) = \rho C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot dx$$

soit $E = \rho C$

Si on injecte un flux $2F$ (Watts = Joules / s) dans le milieu infini, c'est-à-dire F sur chacune des 2 parois, c'est équivalent à injecter un Dirac d'énergie $E = 2.F.dt$ tous les dt . On aura donc, par intégration sur le temps t la température T :

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{2F}{\rho C} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\sqrt{4\pi D\tau}} \cdot d\tau$$

ou bien, puisque $\frac{1}{\rho C} = \frac{D}{\lambda}$ λ étant la conductivité thermique :

$$T(x, t) = \frac{2F \cdot D}{\lambda} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\sqrt{4\pi D\tau}} \cdot d\tau = \frac{2F \cdot D}{\lambda \cdot \sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}}{\sqrt{\tau}} \cdot d\tau$$

On fait le changement de variable : $y = \frac{x}{\sqrt{4D\tau}}$ d'où :

$$\frac{T(x, t)}{\frac{2F \cdot D}{\lambda \cdot \sqrt{4\pi D}}} = -2 \frac{x}{\sqrt{4D}} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4D\tau}}} y^{-2} \cdot e^{-y^2} \cdot dy$$

En intégrant par parties on obtient alors l'expression intégrée suivante :

$$T(x, t) = \frac{F}{\lambda} \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\frac{\sqrt{4D \cdot t}}{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D \cdot t}} \right) \right]$$

Soient les variables adimensionnelles suivantes :

$$x_{ad} = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \quad \text{Abscisse adimensionnelle.}$$

$$t_{ad} = \frac{4D}{x^2} \cdot t \quad \text{Temps adimensionnel.}$$

$$T_{ad}(x, t) = \frac{T(x, t)}{\frac{F}{\lambda} \cdot x} \quad \text{Température adimensionnelle ... qui dépend de } x.$$

On peut écrire l'expression sous la forme suivante :

$$T_{ad}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\sqrt{t_{ad}} \cdot e^{-\frac{1}{t_{ad}}} - \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{t_{ad}}} \right) \right] \quad \text{en fonction du temps.}$$

$$T_{ad}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\frac{1}{x_{ad}} \cdot e^{-x_{ad}^2} - \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc}(x_{ad}) \right] \quad \text{en fonction de l'abscisse.}$$

Remarque :

Une autre expression de la température est :

$$T(x, t) = \frac{F}{\lambda} \cdot \sqrt{4D \cdot t} \cdot \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D \cdot t}} \right)$$

avec

$$\operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} - u \cdot [1 - \operatorname{erf}(u)]$$

N.B. On a les propriétés :

$$\int_0^u \operatorname{erfc}(z) \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{ierfc}(u)$$

et

$$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^{\infty} \operatorname{erfc}(z) \cdot dz$$

Notations :

x = Abscisse

t = Temps

τ = Variable muette d'intégration

y = Variable d'intégration

λ = Conductivité thermique

ρC = Chaleur spécifique volumique

D = Diffusivité thermique = $\lambda / \rho C$

T(x,t) = Température

E = Énergie (ou chaleur)

F = Flux de chaleur (ou d'énergie) en W / m^2 sur la paroi d'un milieu semi-infini. Le flux dans un milieu infini est donc égal à 2F

$\operatorname{erfc}(u)$ = Fonction erreur complémentaire : $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

5 Valeurs de conductivité thermiques et chaleurs spécifiques.

Matériau	Conductivité thermique en W/m/K (à 20°C)
Eau	0.6
Air	0.026
Argile (sèche à humide)	0.15 à 1.8
Argile (saturée d'eau)	0.6 à 2.5
Amiante	0.168
Ardoise (perpendiculaire)	1.4 (à 95°C)
Asphalte	0.75
Basalte	2
Béton	0.92
Brique	0.84
Calcaire	1.3
Craie	0.92
Granite	2.2
Grès	1.3
Houille	0.26
Quartz	7 à 12
Sable sec	0.15 à 0.25
Sable humide	0.25 à 2
Sable saturé	2 à 4
Terre (sèche)	0.75 à 1.5

Tableau 1 : Ordre de grandeur de conductivités thermiques
(source Wikipédia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Conductivité_thermique
et http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html)

Matériau	Chaleur spécifique volumique (en 10 ⁶ J/m ³ /K)
Eau	4.185
Argile (sèche)	2.1
Argile (humide)	2.3
Granite	2.1
Grès	2.3
Sable sec	1.9
Sable humide	1.9
Sel	2.0

Tableau 2 : Ordre de grandeur de chaleurs spécifiques volumiques
(Source : G de Marsily : Quantitative Hydrogeology – Hydrology for Engineers. Academic Press London)

Références

Avdonin, N.A. (1964) – Some formulas for calculating the temperature field of a stratum subject to thermal injection: Meft'i Gaz, Vol. 7, n°3, pp. 37-43 (in Russian).

Butler, R.M. (1983) – Lectures on thermal recovery. Course notes, EMCH-647 Thermal Recovery, Chemical Engineering, University of Calgary, Sept.-Dec. 1983.

Coats, K.H. and Smith, B.D. (1964) - Dead-end pore volume and dispersion in porous media. SPEJ 4, pp. 73–84.

Kolditz, O. et Shao, H. (2010) – OpenGeoSys, Developer-Benchmark-Book OGS-DBB 4.10.07.

Lauwerier, H. A., The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid, Appl. Sci. Res. Sect. A., 5(2-3), 145–151, 1955.

Lefebvre, R. (2006) – Écoulements multiphasiques en milieu poreux. Chap. 5, pp. 161-200.
http://www1.ete.inrs.ca/profs/rl/Chap05_2010a.pdf

Theis, C.V. 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage, Amer. Geophys, Union Transactions, 16th Annual Meeting, V. 16, pt. 2, P519-524.

Updegraff, C.D. (1989) - Comparison of strongly heat driven flow codes for unsaturated media. NUREG/CR-5367. T189016246. Division of Engineering, Office of Nuclear Regulatory Research, U.S. Nuclear Regulatory Commission. 102 p.